机械臂停靠系统动力学建模研究

朱仁璋　王晓光　郑安波
（北京航空航天大学）

摘　要　将主航天器、机械臂末端操纵器与有效载荷视为刚体，而将机械臂连杆视为柔性体，利用拉格朗日方程建立停靠系统接触运动方程，对机械臂停靠系统给出一种简单而实用的建模方法，并对末端操纵器与有效载荷的冲击接触进行分析，研究冲击后系统的状态。此外，对冲击接触引起的系统姿态漂移，采用反馈线性控制，使系统保持稳定。

关键词　停靠系统　动力学　柔性体　拉格朗日方程

1　引言

机械臂停靠系统通常以机械臂作为首次捕获装置，整个停靠系统包括主航天器系统与次航天器系统两部分（见图 1）。这里，“主航天器系统”定义为安装有机械臂的航天器系统，由主航天器（如空间站）与机械臂组成。机械臂通常包括 2 根连杆与末端操纵器[1]。“次航天器系统”定义为被主航天器系统机械臂捕获的对象，也被称为有效载荷，有效载荷上装有抓杆[1]，通过抓杆与末端操纵器的坚固连接实现捕获。这样，停靠系统由下列 5 部分组成：主航天器（物体 1）；连杆 1（物体 2）；连杆 2（物体 3）；末端操纵器（物体 4）；有效载荷（物体 5）。其中，假设主航天器与末端操纵器为刚体，连杆 1 与连杆 2 为柔性体。有效载荷可为多体系统，但这里只研究单个刚体的情况。当有效载荷被机械臂末端操纵器成功捕获时，它成为物体 4 的一部分。

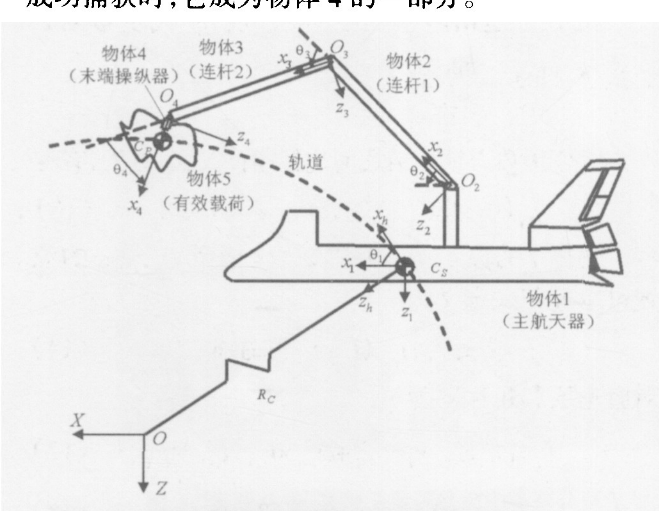

图 1　机械臂捕获有效载荷的示意图（平面情况）

本文着重研究机械臂停靠系统动力学的建模过程。对于包含柔性体的主航天器系统，根据每个物体的拉格朗日方程，组合得出整个系统的运动方程，并根据运动学速度约束矩阵的自然正交补（natural orthogonal complement, NOC）消除方程中的约束力和约束力矩。这个方法结合了牛顿–欧拉方法与拉格朗日方法的优点，既能单独地对每个物体分析，又可方便地用于包含柔性体的系统。

机械臂停靠系统动力学建模包括 3 方面内容：

（1）冲击接触前主航天器系统动力学，研究目的是为了控制末端操纵器的位置和速度；

（2）主航天器系统与次航天器系统在接触过程中的动力学，研究冲击接触对主航天器系统姿态的影响，为接触后组合体的动力学模拟提供初始条件；

（3）接触后组合体动力学，对接触后的残余运动进行控制，使系统稳定。

2　坐标系统

针对研究对象，本文应用下列 6 个坐标系（见图 1）：

（1）惯性坐标系 $OXYZ$，原点在地心 O。

（2）轨道坐标系 $O_hx_hy_hz_h$，坐标原点位于主航天器质心 C_s，x_hz_h 平面为主航天器轨道平面，z_h 轴与主航天器向径重合，但指向地心，x_h 轴与 z_h 轴垂直，指向运动方向；y_h 轴沿轨道面负法线方向。

（3）主航天器本体坐标系 $O_1x_1y_1z_1$，坐标原点位于航天器质心 C_s，x_1 沿主航天器纵轴，指向前；z_1 在对称面内，垂直于纵轴，指向下；y_1 轴垂直于对称平面，指向右方。

(4)局部坐标系 $O_2x_2y_2z_2$,原点在转动连接点 O_2,x_2 沿无形变连杆的纵轴,指向转动连接点 O_3;y_2 沿连杆转动方向;z_2 与 x_2、y_2 满足右手关系。

(5)局部坐标系 $O_3x_3y_3z_3$。

(6)末端操纵器本体坐标系 $O_4x_4y_4z_4$,原点在转动连接 O_4,x_4 沿末端操纵器的纵轴,指向次航天器系统;y_4 沿连杆转动方向;z_4 与 x_4、y_4 满足右手关系。

3 扩展位置矢量与速度矢量

主航天器系统 4 个物体的扩展位置矢量定义如下[2]:

(1)$q_i=\left[\tilde{p}_i^T \quad \tilde{q}_i^T \quad \tilde{b}_i\right]^T$,$i$=2,3,柔性体;

(2)$q_i=\left[\tilde{p}_i^T \quad \tilde{q}_i^T\right]^T$,$i$=1,4,刚体。

其中,$\tilde{p}_i$ 为坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 原点 O_i 相对轨道坐标系 $O_hx_hy_hz_h$ 的位置矢量,且 $\tilde{p}_1=0$;$\tilde{q}_i$ 为坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 相对轨道坐标系 $O_hx_hy_hz_h$ 的姿态,$\tilde{q}_i$ 可以用欧拉角或四元数表示;$\tilde{b}_i$ 为弹性广义坐标,用于描述柔性连杆相对局部坐标系的形变。

主航天器系统 4 个物体的扩展速度矢量定义如下[2]:

(1)$v_i=\left[\tilde{v}_i^T \quad \omega_i^T \quad \dot{b}_i^T\right]^T$,$i$=2,3,柔性体;

(2)$v_i=\left[\tilde{v}_i^T \quad \omega_i^T\right]^T$,$i$=1,4,刚体。

其中,$\tilde{v}_i$ 为坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 原点 O_i 相对轨道坐标系 $O_hx_hy_hz_h$ 的速度,$\tilde{v}_i=\dot{\tilde{p}}_i$,且 $\tilde{v}_1=0$;ω_i 为坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 相对轨道坐标系 $O_hx_hy_hz_h$ 的角速度;$\dot{b}_i$ 为弹性广义坐标 b_i 对时间的导数。

设 v_i 的维数为 m_i,$\dot{q}_i$ 的维数为 n_i,m_i 与 n_i 可以不相等。v_i 和 $\dot{q}_i$ 之间有如下关系:

$$v_i=L_i\dot{q}_i,\ \dot{q}_i=\Lambda_iv_i \tag{1}$$

其中,$L_i\Lambda_i=E_{m_i}$,这里 E_{m_i} 为 m_i 阶单位矩阵[3]。

设 r_i 为柔性连杆上的任一点相对局部坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 的位置矢量。定义 i_i,j_i,k_i 分别为坐标系三轴单位矢量,$(\bar{x}i,\bar{y}i,\bar{z}i)$ 表示无变形杆上任一点在局部坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 的坐标,假设连杆模型为细长梁,可忽略 $\bar{y}i$、$\bar{z}i$,则 r_i 可表示为[2,4]:

$$r_i=\bar{x}_ii_i+\mu_i(\bar{x}_i,t) \tag{2}$$

式中,μ_i 为结构形变引起(柔性杆上点)的位移,$\mu_i(\bar{x}_i,t)=\mu_{i(x)}i_i+\mu_{i(y)}j_i+\mu_{i(z)}k_i$,它在 x_i 向的分量由轴向伸缩效应引起,与离心力有关,在小转速情况下可以忽略,$\mu_{i(x)}=0$。μ_i 在 y_i、z_i 向上的分量由弯曲形变产生,可表示为[4,5]:

$$\mu_{i(y)}(\bar{x}_i,t)=\sum_{j=1}^{m}\phi_{ij}(\bar{x}_i)b_{ij}(t) \tag{3}$$

$$\mu_{i(z)}(\bar{x}_i,t)=\sum_{j=1}^{m}\phi_{i(m+j)}(\bar{x}_i)b_{i(m+j)}(t) \tag{4}$$

式中,$\phi_{ij}(\bar{x}_i)$ 为物体 i 的形状函数,用以模拟柔性体弹性形变,m 为形状函数数目,形状函数为容许函数。$\mu_i(\bar{x}_i,t)$ 可写成如下矩阵形式:

$$\mu_i(\bar{x}_i,t)=B_i(\bar{x}_i)b_i(t),\quad i=2,3 \tag{5}$$

其中,$B_i(\bar{x}_i)$ 为 3×2m 维的形状函数矩阵,$b_i(t)$ 为弹性广义坐标,它们的形式分别如下:

$$B_i(\bar{x}_i)=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \phi_{i1} & \cdots & \phi_{im} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \phi_{i(m+1)} & \cdots & \phi_{i(2m)}\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$b_i(t)=\left[b_{i1} \ \cdots \ b_{im} \ b_{i(m+1)} \ \cdots \ b_{i(2m)}\right]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

物体 i 末端相对局部坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 的转动 δ_i(y 轴分量见图 2)可表示如下:

$$\delta_i(l_i,t)=D_i(l_i)b_i(t),\quad i=2,3 \tag{8}$$

式中,$D_i(l_i)$ 形式如下:

$$D_i(l_i)=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -\phi'_{i(m+1)} & \cdots & -\phi'_{i(2m)}\\ \phi'_{i1} & \cdots & \phi'_{im} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中,l_i 是物体 i 的无形变长度,ϕ' 代表 ϕ 对 $\bar{x}_i$ 的微分,即 $\phi'=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\bar{x}_i}$。

容许函数必须满足几何边界条件,在 $\bar{x}_i=0$ 处,有[5]:

$$\mu_i(0,t)=0,\ \delta_i(0,t)=0,\quad i=2,3 \tag{10}$$

物体 i 的原点 O_i 相对轨道坐标系 $O_hx_hy_hz_h$ 的位置可由递归式定义为:

$$\tilde{p}_i=\tilde{p}_{i-1}+r_{i-1}(l_{i-1}),\quad i=3,4 \tag{11}$$

对应速度和角速度为[2,4]:

$$\tilde{v}_2=\omega_1\times\tilde{p}_2,\ \tilde{v}_i=\tilde{v}_{i-1}+\omega_{i-1}\times r_{i-1}(l_{i-1})+\dot{\mu}_{i-1} \tag{12}$$

$$\omega_2=\omega_1+\dot{\theta}_2,\quad \omega_1=\omega_{i-1}+\dot{\delta}_{i-1}+\dot{\theta}_1 \tag{13}$$

式中，i=3，4。假定相邻连杆之间是转动连接，θ_i 是刚体条件下坐标系 $O_i x_i y_i z_i$ 相对坐标系 $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 的方位；$\tilde{p}_2$ 为给定常量，是转动连接 O_2 相对坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$ 原点 C_1 的位置矢量。

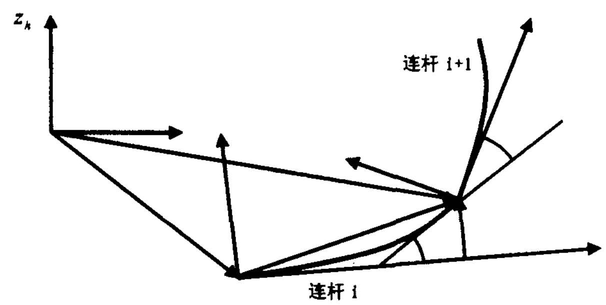

图 2 连杆在局部坐标系中的表示

4 无接触冲击的动力学方程

4.1 单件物体的动力学方程

假设主航天器和末端操纵器为刚体，因此，其动能和势能可表示为[2]：

$$T_i=\frac{1}{2}v_i^T M_i v_i,\ U_i=0,\ \ i=1,\ 4 \tag{14}$$

式中，M_i 为扩展质量矩阵：

$$M_i=\begin{bmatrix} m_i E_3 & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_i \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中，m_i 是物体的质量；I_1 为物体 1（主航天器）绕质心 C_1 的转动惯量，I_4 为物体 4（末端操纵器）绕转动连接点 O_4 的转动惯量。

连杆 1 和连杆 2 上任一点相对轨道坐标系的位置与速度分别表示如下：

$$p_i=\tilde{p}_i+r_i \tag{16}$$

$$\dot{p}_i=\dot{\tilde{r}}_i+\omega_i\times r_i+\dot{r}_i \tag{17}$$

根据式(2)与式(5)，上式又可用矩阵形式写为：

$$\dot{p}_i=\dot{\tilde{r}}_i-[r_i\times]\omega_i+B_i\dot{b}_i \tag{18}$$

其中，$[r_i\times]$ 为矢积矩阵，式(18)可进一步表示为：

$$\dot{p}_i=W_i v_i,\quad W_i=[E_3\ -[r_i\times]\ B_i] \tag{19}$$

柔性连杆的动能可表示如下[4]：

$$T_i=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}\rho_i(x)\dot{p}_i^T\dot{p}_i\,\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}M_i\dot{p}_i^T(l_i)\dot{p}_i(l_i)+\frac{1}{2}\omega_i^T I_{hi}\omega_i \tag{20}$$

式中，i=2，3，ρ_i 是连杆线密度，M_i 是连杆末端的集中质量，I_{hi} 为绕转动连接的转动惯量[6]。假定连杆是细长梁，根据欧拉–柏努利梁理论，忽略转动效应。ω_i 可由扩展速度矢量 v_i 表示为：

$$\omega_i=Hv_i,\quad H=[0_{3\times3}\ \ E_3\ \ 0_{3\times2m}] \tag{21}$$

根据式(19)与式(21)，式(20)又可表示为：

$$T_i=\frac{1}{2}v_i^T M_i v_i\ ,$$

$$M_i=\int_0^{l_i}\rho W_i^T W_i\,\mathrm{d}x+M_i W_i^T W_i\big|_{x=l_i}+H^T I_{hi}H \tag{22}$$

其中，M_i 被称为扩展质量矩阵。根据式（1），式(22)可进一步写成如下形式：

$$T_i=\frac{1}{2}\dot{q}_i^T I_i\dot{q}_i\ ,\quad I_i=L_i^T M_i L_i \tag{23}$$

其中，I_i 被称为广义质量矩阵。

忽略重力，储存在柔性连杆中的弹性应变能可表示为[4]：

$$U_i=\frac{1}{2}\int_0^{l_i}EI\left(\left(\frac{\partial^2\mu_{i(y)}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\mu_{i(z)}}{\partial x^2}\right)^2\right)\mathrm{d}x \tag{24}$$

式中，i=2，3，E 和 I 分别是弹性模量和截面惯性矩。根据欧拉–柏努利梁理论，忽略剪切变形。令

$$\mu''_i=B''_i b_i \tag{25}$$

符号 a'' 表示 a 对 $\bar{x}_i$ 的二阶偏导数，$a''=\dfrac{\partial^2 a}{\partial\bar{x}_i^2}$。势能的矩阵形式为：

$$U_i=\frac{1}{2}q_i^T K_i q_i,\quad K_i=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&K''_i\end{bmatrix} \tag{26}$$

式中，

$$K''_i=EI\int_0^{l_i}B''^T_i B''_i\,\mathrm{d}x$$

得到物体的动能和势能之后，代入拉格朗日方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_i}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T_i}{\partial q_i}=w_i-\frac{\partial U_i}{\partial q_i} \tag{27}$$

式中，i=1,2,3,4；w_i 为作用在物体 i 上的非保守广义力矢量[7]，

$$w_i=w_{Ei}+w_{Ci}+w_{Ai}$$

这里，w_{Ei} 为外力矢量，w_{Ci} 为运动学约束力矢量，w_{Ai} 为代数约束力矢量(由四元素代数约束引起)。用 A_i^T 左乘式(27)，根据 $A_i^T w_{Ai}=0$ 消去 w_{Ai}，则物体 i 的运动方程为[8]：

$$M_i\dot{v}_i=u_{Ei}+u_{Si}+u_{Gi} \quad (28)$$

式中，u_{Ei} 表示广义外力，u_{Gi} 表示广义约束力，u_{Si} 表示系统力(离心力，柯氏力，阻尼力等)：

$$u_{Ei}=\Lambda^T_i w_{Ei}, \quad u_{Gi}=\Lambda^T_i w_{Gi}$$

$$u_{Si}=M_i\dot{L}_i\Lambda_i v_i-\Lambda^T_i\dot{I}_i\Lambda_i v_i+$$

$$\frac{1}{2}\Lambda^T_i\frac{\partial}{\partial q_i}\{vTiM_iv_i\}-\Lambda^T_i\frac{\partial U_i}{\partial q_i}$$

4.2 整个系统的动力学方程

组合4个物体的运动方程，则主航天器系统的运动约束方程可表示为：

$$M\dot{v}=u_E+u_S+u_C \quad (29)$$

其中，M为系统的广义扩展质量矩阵，$\dot{v}$为广义扩展加速度，u_E为广义扩展外力，u_S为广义扩展系统力，u_C为广义扩展约束力：

$$M=\mathrm{diag}[M_1,M_2,M_3,M_4]$$

$$\dot{v}=\left[\dot{v}_1^T \quad \dot{v}_2^T \quad \dot{v}_3^T \quad \dot{v}_4^T\right]^T$$

$$u_E=\left[u_{E1}^T \quad u_{E2}^T \quad u_{E3}^T \quad u_{E4}^T\right]^T$$

$$u_S=\left[u_{S1}^T \quad u_{S2}^T \quad u_{S3}^T \quad u_{S4}^T\right]^T$$

$$u_C=\left[u_{C1}^T \quad u_{C2}^T \quad u_{C3}^T \quad u_{C4}^T\right]^T$$

根据相邻连杆体的线速度与角速度的约束关系，可得运动学约束方程[9,10]：

$$C_v=0 \quad (30)$$

其中C是运动学速度约束矩阵。

用一组最小的独立广义坐标表示运动方程的解空间，该广义坐标定义为[4]：

$$\Psi=\left[\Psi_1^T \quad \Psi_2^T \quad \Psi_3^T \quad \Psi_4^T\right]^T \quad (31)$$

式中，

$$\Psi_1=[\theta_1], \quad \theta_1=[\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$$

$$\Psi_2=\left[\theta_2 \quad b_2^T\right]^T, \Psi_3=\left[\theta_3 \quad b_3^T\right]^T, \Psi_4=[\theta_4]$$

这里，欧拉角α、β、γ描述主航天器的姿态。其余3个物体的广义坐标取决于该物体是柔性体还是刚体。

根据运动学关系式(12)与式(13)，广义扩展速度v可由独立的广义速度$\dot{\Psi}$表示为：

$$v=N\dot{\Psi} \quad (32)$$

转换矩阵N是速度约束矩阵C的自然正交补。对上式求导：

$$\dot{v}=N\ddot{\Psi}+\dot{N}\dot{\Psi} \quad (33)$$

由达朗伯原理可知，约束力不做功，即

$$N^Tu_C=0 \quad (34)$$

用N^T左乘式(29)，根据式(34)消去约束力u_C，并将式(33)代入，则不含约束的主航天器系统动力学方程表示如下：

$$\widetilde{M}\ddot{\Psi}=c(\Psi,\dot{\Psi})+f \quad (35)$$

式中，$\widetilde{M}$为系统广义质量矩阵(对称正定矩阵)，f代表广义外力，c包含柯氏惯性项、阻尼项和离心项：

$$\widetilde{M}=N^TMN, \quad c=N^T\left[u_S-M\dot{N}\dot{\Psi}\right], \quad f=N^Tu_E \quad (36)$$

5 冲击作用下的动力学方程与控制

5.1 动力学方程

如果有力和力矩作用于主航天器系统末端（机械臂的末端操纵器），式(35)应表示为[4]：

$$\widetilde{M}\ddot{\Psi}=c(\Psi,\dot{\Psi})+f+J^T\lambda \quad (37)$$

式中，λ为作用在末端操纵器的力和力矩；J为$6\times N'$维的主航天器系统雅克比矩阵[4,11]：

$$J=\begin{bmatrix}J_1\\J_2\end{bmatrix} \quad (38)$$

其中

$$J_1=\left[\frac{\partial p_n}{\partial\Psi_1} \quad \frac{\partial p_n}{\partial\Psi_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial p_n}{\partial\Psi_{N'}}\right]$$

$$J_2=\left[\frac{\partial\omega_n}{\partial\dot{\Psi}_1} \quad \frac{\partial\omega_n}{\partial\dot{\Psi}_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial\omega_n}{\partial\dot{\Psi}_{N'}}\right] \quad (39)$$

式中，N'为广义坐标自由度，p_n和ω_n是主航天器系统末端相对主航天器的位置和角速度矢量：

$$p_n=\tilde{p}_2+r_2(l_2)+r_3(l_3)+r_4 \quad (40)$$

$$\omega_n=\omega_1+\dot{\theta}_2+\dot{\delta}_2+\dot{\theta}_3+\dot{\delta}_3+\dot{\theta}_4 \quad (41)$$

式中，r_4为作用在末端操纵器的力的作用点相对转动连接O_4的位置矢量。

现在考虑主航天器系统与有效载荷的冲击接触，并设定下列基本假设[12]：

(1)在接触期间，尽管广义速度变化很大，但系统的广义坐标保持不变（该假设同样适用于转动坐标和弹性坐标）；

(2) 末端操纵器与有效载荷之间的接触点上只存在作用力，没有力矩。

根据式(37)可知，在接触期间，主航天器系统的

运动方程为：

$$\widetilde{M}\ddot{\psi}=c+f+J^{T}f_{1} \tag{42}$$

式中，J 是主航天器系统在接触点处的雅克比矩阵，定义如式(39)中的 J_1；f_1 为冲击力矢量。单刚体有效载荷的运动方程为[13]：

$$M_{p}\dot{w}_{p}=c_{p}-A\xi_{1} \tag{43}$$

式中，w_p 是次航天器系统质心速度和角速度组成的 6 维扩展速度矢量；矢量 c_p 包含与位置和速度相关的项，如柯氏惯性项、阻尼项和离心项。$\xi_1=\left[f_1^{T}\quad 0_{1\times3}\right]^{T}$；$M_p$ 是扩展质量矩阵，形式如下：

$$M_{p}=\begin{bmatrix} m_{p}E_{3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{p} \end{bmatrix} \tag{44}$$

式中，M_p 是次航天器系统质量，I_p 是质心惯量矩阵；A 可表示为：

$$A=\begin{bmatrix} E_{3} & 0_{3\times3} \\ [r_{pb}\times] & E_{3} \end{bmatrix} \tag{45}$$

式中，r_{pb} 是次航天器系统接触点相对其质心的位置矢量。根据上述基本假设(2)，式(42)与式(43)中不出现冲击力矩。由式(42)与式(43)，消去冲击力矢量 f_1，可得：

$$J^{T}S^{-1}[E_{3}-[r_{pb}\times]]\dot{w}_{p}+\widetilde{M}\ddot{\psi}=c+f+J^{T}S^{-1}\left[m_{p}^{-1}E_{3}-[r_{pb}\times]I_{p}^{-1}\right]c_{p} \tag{46}$$

其中，

$$S=m_{p}^{-1}E_{3}-[r_{pb}\times]I_{p}^{-1}[r_{pb}\times]$$

由上述基本假设(1)可知，接触期间系统广义坐标保持不变，而广义速度可以改变。因 J 和 $\widetilde{M}$ 仅依赖于广义坐标，不依赖广义速度，因此，对时间 τ（接触持续时间）积分时可将其提到积分号外。由于通常情况下，接触力很大，作用时间很短，因此，可以假定下列量级关系[13]：

$$\tau=O(\varepsilon),\qquad \ddot{\psi},\dot{w}_{p}=O(1/\varepsilon)$$

$$\psi,r_{pb},\dot{\psi},w_{p}=O(1),\qquad \varepsilon\leqslant1$$

对式(46)积分，保留 $O(1)$ 项，忽略 $O(\varepsilon)$ 项，有：

$$J^{T}S^{-1}[E_{3}-[r_{pb}\times]](w_{pf}-w_{pi})+\widetilde{M}(\dot{\psi}_{f}-\dot{\psi}_{i})=0 \tag{47}$$

式中，下标 i 与 f 分别表示开始接触与脱离接触两个节点。上式表示广义动量守恒，适用于任意类型接触（从塑性接触到完全弹性接触）。对塑性接触，两个系统在接触点彼此刚性连接；对完全弹性接触，系统压缩后的反弹不伴随能量损失。塑性接触与成功捕获对应，本文只研究这种情况。对塑性接触，冲击后两系统在接触点处的速度相同，因此可得[14]：

$$[E_{3}-[r_{pb}\times]]w_{pf}=J\dot{\psi}_{f} \tag{48}$$

主航天器系统冲击后的广义速度 $\dot{\psi}_f$ 形式如下：

$$\dot{\psi}_{f}=G^{-1}H \tag{49}$$

式中

$$G=J^{T}S^{-1}J+\widetilde{M} \tag{50}$$

$$H=J^{T}S^{-1}(v_{pi}-[r_{pb}\times]w_{pi})+\widetilde{M}\dot{\psi}_{i} \tag{51}$$

冲击后有效载荷的质心速度和角速度如下：

$$v_{pf}=m_{p}^{-1}S^{-1}\left(J\dot{\psi}_{f}m_{p}[r_{pb}\times]I_{p}^{-1}[r_{pb}\times]v_{pi}+[r_{pb}\times]\omega_{pi}\right) \tag{52}$$

$$\omega_{pf}=m_{p}I_{p}^{-1}[r_{pb}\times](v_{pf}-v_{pi})\omega_{pi} \tag{53}$$

显然，根据接触前的初始条件 $\dot{\psi}_i$、v_{pi} 和 ω_{pi}，利用式(49)至式(53)可分别求出 $\dot{\psi}_f$、v_{pf} 和 ω_{pf}。

5.2 控制方案设计

由于末端操纵器与安装在有效载荷上的抓杆之间存在相对速度，这将产生接触冲击；为避免冲击引起的姿态漂移，需要施加控制以保持系统稳定。这里采用反馈线性控制法，即通过反馈使运动方程线性化。控制力矩由机械臂转动连接处的驱动电机，或者由安装在主航天器上的推力器、反作用轮来提供。为了方便对主航天器-机械臂-有效载荷系统的动力学进行控制与仿真，这里将主航天器系统动力学方程式(35)表示为下列形式[13]：

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta b} \\ M_{b\theta} & M_{bb} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{\theta} \\ c_{b} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

式中，θ 是航天器姿态角与机械臂转角组成的矢量，b 是弹性广义坐标组成的矢量；下标 θ 和 b 分别表示矩阵和矢量与 θ 和 b 相关。k 是控制力矩。消去 $\ddot{b}$，上式又可写为：

$$\hat{M}\ddot{\theta}=\hat{c}(\psi+\dot{\psi})+k \tag{55}$$

式中，$\hat{M}=M_{\theta\theta}-M_{\theta b}M_{bb}^{-1}M_{b\theta}$，$\hat{c}=c_{\theta}-M_{\theta b}M_{bb}^{-1}c_{b}$ (56)

采用反馈线性控制，控制力矩为：

$$k=-\hat{M}\left[D_{1}\dot{\theta}+D_{2}(\theta-\theta_{d})\right]-\hat{c} \tag{57}$$

式中，θ_d 表示 θ 的期望终值，$\hat{c}$ 为控制力矩中的非线性补偿项，D_1 与 D_2 为对角矩阵：

$$D_1=\mathrm{diag}[2\zeta_1\omega_1,\ 2\zeta_2\omega_2,\ \ldots] \quad (58)$$

$$D_2=\mathrm{diag}[\omega_1^2,\ \omega_2^2,\ \ldots] \quad (59)$$

这里，ζ_1 与 ω_i 分别为期望阻尼系数与期望频率。因此，式(55)可表示为一组非耦合的线性方程：

$$\ddot{\theta}+D_1\dot{\theta}+D_2(\theta-\theta_d)=0 \quad (60)$$

上述控制方案相对比较简单，假定所有状态是可知的，并且忽略噪声。

6 结论

在机械臂停靠系统动力学研究中，一种比较简单而实用的模型是将主航天器、机械臂末端操纵器与有效载荷视为刚体，而将机械臂连杆视为柔性体。利用拉格朗日方程，建立停靠系统接触运动方程，并对末端操纵器与有效载荷的冲击接触进行分析，研究冲击后的系统的状态。此外，对冲击接触引起的系统姿态漂移，采用反馈线性控制，使系统保持稳定。◇

参考文献

[1] 朱仁璋,郑安波,娄汉文,王晓光．航天器联接系统发展概况综述[J]．载人航天, 2007, 23(1)

[2] Cyril X, Jaar G J, and Misra A K. Dynamical Modeling and Control of A Spacecraft-Mounted Manipulator Capturing A Spinning Satellite, Acta Astronautical, 1995. 36(2/3): 167~174

[3] Min B N, Misra A K, Cyril X, Modi V J, de Silva C W. Simulation of The Dynamics of Space Systems Using Object-Oriented Modeling, AIAA 2000-4177

[4] Kim S W. Contact Dynamics and Force Control of Flexible Multi-Body Systems, PHD Thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal, Quebec, Canada

[5] Yoshimoto M. Dynamics and Control of a Space Manipulator, PHD Thesis, Department of Engineering Science and Mechanics, The Pennsylvania State, America

[6] Chapnik B V, Heppler G R, and Aplevich J D. Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm, IEEE Transaction On Robotics and Automation, August 1991, 17(4)

[7] Cyril X, Angeles J, and Misra A K. Dynamics of Flexible Multibody Mechanical Syetems, Transactions of The CSME, 1991, 16 (3): 236~266

[8] Boutin B A, and Misra A K. Dynamics of Manipulating Truss Structures, AIAA-96-3623-CP

[9] Saha S K, and Angeles J. Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using A Natural Orthogonal Complement, ASME Journal of Applied Mechanics, 1991(68): 238~243

[10] Angeles J, and Lee S. The Formulation of Dynamical Equations of Holonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement, ASME Journal of Applied Mechanics, 1988a(66): 243~244

[11] Yoji Umetani and Kazuya Yoshida, Resolved Motion Rate Control of Space Manipulators With Generalized Jacobian Matrix, IEEE Transactions on Robotics and Automation, June 1989, 5(3)

[12] Cyril X, Kim S W, and Misra A K. Post-Impact Dynamics of Two Multi-body Systems Attempting Docking/Berthing, Acta Astronautical, 1997, 40(11): 769~769

[13] Cyril X, Misra A K, and Ingham M. Postcapture Dynamics of a Spacecraft-Manipulator-Payload System, Journal of Guidance, Control and Dynamics, January-February 2000, 23(1): 96~99

[14] Cyril X, Jaar G J, and Misra A K. The Effect of Payload Impact on the Dynamics of a Space Robot, Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Yokohama, Japan, July, 1993: 26~30